Licence 3-ième année **4 juin 2015**
2014–2015

Examen de Géométrie

Durée 3 heures

LES DOCUMENTS NE SONT PAS AUTORISÉS

Exercice 1 Soit E un espace affine réel de direction $\overrightarrow{E}$.

1. Étant donnés un scalaire non nul $\lambda \in \mathbb{R}^*$, une droite vectorielle $\overrightarrow{D} \subset \overrightarrow{E}$ et un hyperplan $H \subset E$ de direction $\overrightarrow{H}$, on suppose que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{H} \oplus \overrightarrow{D}$ et on définit l'application $f : E \to E$ par : $f(M) = \pi_H(M) + \lambda \cdot \overrightarrow{\pi_H(M)M}$; ici π_H désigne la projection sur H de direction $\overrightarrow{D}$.
   L'application f est appelée affinité d'hyperplan H, de direction $\overrightarrow{D}$ et de rapport λ.
   (a) Montrer que f est une application affine et que $L_f = \lambda\pi_{\overrightarrow{D}} + \pi_{\overrightarrow{H}}$.
   Ici $\pi_{\overrightarrow{D}}$ et $\pi_{\overrightarrow{H}}$ sont les projections selon la décomposition $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{D} \oplus \overrightarrow{H}$.
   (b) Déterminer l'ensemble des points fixes de f.
   On constatera que deux cas se présentent : $\lambda = 1$ et $\lambda \neq 1$.

2. Réciproquement, on se donne un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}^*$, un hyperplan vectoriel $\overrightarrow{H} \subset \overrightarrow{E}$, une droite vectorielle $\overrightarrow{D} \subset \overrightarrow{E}$. On suppose que f est une application affine telle que $L_f = \lambda\pi_{\overrightarrow{D}} + \pi_{\overrightarrow{H}}$.
   (a) Montrer que si $\lambda = 1$ alors f est une translation.
   (b) Montrer que si $\lambda \neq 1$ alors f admet (au moins) un point fixe A_0 puis que f est une affinité d'hyperplan $H = A_0 + \overrightarrow{H}$, de direction $\overrightarrow{D}$ et de rapport λ.

3. Une affinité telle que $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{D}^{\perp}$ est appelée affinité orthogonale d'hyperplan H et de rapport λ.
   Soient f_1 et f_2 deux affinités orthogonales d'hyperplans et rapports respectifs H_1 et λ_1 et H_2 et λ_2. On suppose que H_1 et H_2 sont parallèles. Soit $f = f_2 \circ f_1$.
   (a) Si $\lambda_1\lambda_2 = 1$, montrer que f est une translation et montrer que si $H_1 \neq H_2$ alors cette translation est non nulle.
   (b) Si $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, montrer que f est une affinité orthogonale (on ne demande pas la détermination explicite de l'hyperplan de f).

Exercice 2 Soit E un espace projectif de dimension 3 sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe trois droites (projectives) D_1, D_2, D_3 de E tels que $D_i \cap D_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.
2. Soient D_1, D_2, D_3 de telles droites. Soit $A \in D_1$. Montrer qu'il existe une droite projective D contenant A et rencontrant D_2 et D_3.

Exercice 3 Soit A une partie d'un espace affine E de dimension finie. On dit que P est un point extrémal de A si : pour tous $P_1, P_2 \in A$, si $P \in [P_1 P_2]$ alors $P = P_1$ ou $P = P_2$. On notera $\mathrm{Ext}(A)$ l'ensemble de ses points extrémaux.

1. Soit $f : E \to E$ une application affine injective. Montrer que si P est un point extrémal de A alors $f(P)$ est un point extrémal de $f(A)$
2. A partir de maintenant, E désigne l'espace affine $\mathbb{R}^2$ de direction $\overrightarrow{E} = \mathbb{R}^2$.
   Soient $D = \{(x, y) \in E | x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $C = \{(x, y) \in E | x^2 + y^2 = 1\}$ le disque et le cercle de centre 0 et rayon 1.
   (a) Soient $P_1, P_2 \in D$ et $P \in C$. Montrer que si $P \in [P_1 P_2]$ et $P_1 \notin C$ alors $P = P_2$.
   Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Utiliser la question précédente pour montrer que $\mathrm{Ext}(D) = C$.
   Indication : pour l'inclusion "$\subset$" on pourra procéder par contraposée.
   (c) Considérons le carré plein $A = [0; 1]^2 \subset E$. Montrer que tout point extrémal de A est un sommet du carré.
   Indication : on pourra le faire par contraposée.
   (d) Existe-t-il une application affine $f : E \to E$ telle que $f(D) = A$?